2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬試験問題

[redacted]

区分	理工学 研究科 数理・物理サイエンス 専攻	科目名	外国語科目	参照物	持込 不可 ( )
	博士前期／修士		英語(解答用紙)	形式	全部で 2 枚
	一般試験				

重力とは何か

重力とは、物体同士を互いに引き寄せる力である。私たちは毎日重力を経験しているが、普段はそれについてあまり意識しない。リンゴが木から落ちるとき、雨が雲から降るとき、あるいは人がジャンプして再び地面に戻るとき、これらの現象には重力が関わっている。

地球は非常に大きな質量をもっており、そのため強い重力を生み出している。重力があるおかげで、人間や動物、建物は地球の表面にとどまっている。もし重力がなければ、物体は本来あるべき場所にとどまらず、どこかへ漂っていってしまうだろう。重力はまた、物体に重さを与えている。例えば、地球上で 60 キログラムの体重がある人は、月では月の重力が弱いため、ずっと軽く感じるだろう。

重力は地球上のものだけでなく、宇宙の天体にも影響を及ぼしている。重力は月が地球のまわりを回るのを助けるとともに、地球が太陽のまわりを回るのにも重要な役割を果たしている。このように、重力は惑星やその他の天体の運動に大きく関わっている。科学者たちは、重力が運動にどのような影響を与えるかを調べることで、宇宙について多くのことを学ぶことができる。

宇宙飛行士は宇宙へ行くと重力から逃れたと考えられがちである。しかし実際には、重力は依然として彼らに作用している。宇宙飛行士が浮いているように見えるのは、彼らが地球の周囲を高速で移動しながら落下し続けているためである。このため、宇宙船の中では無重力のような感覚が生じる。

重力は地球上の生命にとって不可欠である。重力は水や空気、そして生物を地球表面の近くにとどめている。もし重力がなければ、生命に必要な条件の多くは存在しないだろう。私たちは重力そのものを直接見ることはできないが、その影響は身の回りのほとんどあらゆる場所で観察することができる。

	配点	採点（得点）

受験番号　　氏　名

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

[redacted]

区分	理工学 数理・物理サイエンス　研究科 専攻 博士前期／修士 一般試験	科目名	専門科目 数学基礎（解答用紙）	参照物	持込　可・不可 （　　）
				形式	全部で　　枚

[微分積分学]

[微分積分学] 解答例

1. (1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \, \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} \, dx = \left[\frac{-\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi} = 0.$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x\, e^x \, dx = \int_0^1 x \left(e^x\right)' dx = \left[x\, e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = \left[x\, e^x - e^x\right]_0^1 = 1.$

(3)　極座標 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ に変数変換すると $\mathbb{R}^2$ は $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ に対応する．また，ヤコビアンが $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ であることに注意すると，

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \iint_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} \, r dr d\theta = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \, r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi.$$

(4)　$R > 0$ に対し，$I_R := \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \, dx$，$B_R := \{(x,y); x^2+y^2 < R^2\}$ とおくと，(3) と同様にして，$\displaystyle\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$ となる．また，$(I_R)^2 = \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \, dx \int_{-R}^{R} e^{-y^2} \, dy = \iint_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy$ および，$B_R \subset [-R,R]^2 \subset B_{2R}$ に注意すれば，$\pi\left(1 - e^{-R^2}\right) \le (I_R)^2 \le \pi\left(1 - e^{-(2R)^2}\right)$ を得る．$R \to \infty$ とすれば，

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} I_R = \sqrt{\pi}.$$

2. 関数 $z = e^{2x+y}\cos(x+3y)$ の偏導関数は $\begin{cases} z_x = 2e^{2x+y}\cos(x+3y) - e^{2x+y}\sin(x+3y) \\ z_y = e^{2x+y}\cos(x+3y) - 3e^{2x+y}\sin(x+3y) \end{cases}$

となるので，$(x,y) = (0,0)$ のとき，$z = 1, z_x = 2, z_y = 1$ である．よって $(0,0,1)$ における接平面は $z - 1 = 2x + y$ である．

	配点	採点（得点）

受験番号　　氏　名

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

区分	理工学 数理・物理サイエンス　研究科 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 (　　)
	博士前期／修士		数学基礎（解答用紙）	形式	全部で　　枚
	一般試験				

[線形代数]

解答例

(1) 行列 A の固有多項式を求めると,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\big((\lambda+1)(\lambda-2)+2\big) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2).\end{aligned}$$

したがって，A の固有値は

$$\boxed{0,\ 1,\ 2}$$

である。

(2) まず，固有値 0 に対応する固有ベクトルを求める。$v = {}^t(x, y, z)$ とすると,

$$Av = 0$$

より

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

係数行列を基本変形すると,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので,

$$x = y, \qquad z = 0$$

を得る。したがって，固有値 0 に対応する固有ベクトルは

$$\boxed{v = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R},\ t \neq 0)}$$

	配点	採点（得点）

受験番号　　氏　名

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

区分	理工学 数理・物理サイエンス 研究科 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 ( )
	博士前期／修士		数学基礎（解答用紙）	形式	全部で　枚
	一般試験				

[線形代数]

である.

次に, 固有値 1 に対応する固有ベクトルを求める. 係数行列を基本変形すると,

$$I-A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となるので, 固有値 1 に対応する固有ベクトルは

$$\boxed{v=t\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\quad(t\in\mathbb{R},\ t\neq 0)}$$

である.

最後に, 固有値 2 に対応する固有ベクトルを求める. 係数行列を基本変形すると,

$$2I-A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となるので, 固有値 2 に対応する固有ベクトルは

$$\boxed{v=t\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}\quad(t\in\mathbb{R},\ t\neq 0)}$$

である.

(3) 固有値 $0,1,2$ はすべて異なるので, A は対角化可能である. 各固有値に対応する固有ベクトルを並べて

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

とおくと, $A=PDP^{-1}$ である. また,

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

	配点	採点（得点）

受験番号　　氏　名

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

[redacted]

区分	理工学 数理・物理サイエンス　研究科 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 (　　)
	博士前期／修士		数学基礎（解答用紙）	形式	全部で　　枚
	一般試験				

[線形代数]

したがって，$n \geq 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2^n - 3 \\ -2 & 2 & 2^{n+2} - 6 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}}.
\end{aligned}
$$

受験番号　　氏　名

	配点	採点（得点）

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

[redacted]

区分	理工学 研究科 数理・物理サイエンス 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 (　　)
	博士前期／修士		数理サイエンス（解答用紙）	形式	全部で　　枚
	一般試験				

選択した問題に丸をつけてください (代数学・幾何学・解析学)

[代数学] 解答

(1) $F\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x-3z & -4x+2y-2z-4w \\ x+2y-2z+w & -3y-4w \end{bmatrix}$ なので

$$
\begin{aligned}
F(E_1) &= 4E_1 - 4E_2 + E_3, \\
F(E_2) &= 2E_2 + 2E_3 - 3E_4, \\
F(E_3) &= -3E_1 - 2E_2 - 2E_3, \\
F(E_4) &= -4E_2 + E_3 - 4E_4
\end{aligned}
$$

となる. したがって F の表現行列は

$$
B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.
$$

(2)　固有値 λ の広義固有空間を $\tilde{V}_\lambda$ とあらわす. B の固有多項式は

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) = \det(xI - B) &= \begin{vmatrix} x-4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & x-2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & x+4 \end{vmatrix} \\
&= x^4 - 25x^2 = x^2(x-5)(x+5)
\end{aligned}
$$

なので B の固有値は 0 (2 重解), ± 5 である.

(a)　固有値 $\lambda = -5$ のとき

$$
\lambda I - B = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -7 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

なので $\tilde{V}_{-5}$ の基底は $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$, 正規直交基底は $\boxed{\left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}}$.

	配点	採点（得点）

受験番号　　氏　名

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

[redacted]

区分	理工学 数理・物理サイエンス　研究科 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 (　　)
	博士前期／修士		数理サイエンス（解答用紙）	形式	全部で　　枚
	一般試験				

選択した問題に丸をつけてください（代数学・幾何学・解析学）

(b)　固有値 $\lambda = 5$ のとき

$$\lambda I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので $\widetilde{V}_5$ の基底は $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, 正規直交基底は $\boxed{\left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}$.

(c)　固有値 $\lambda = 0$ のとき

$$(\lambda I - B)^2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -6 & -3 \\ -26 & 12 & 12 & 6 \\ -6 & -3 & -3 & -14 \\ 12 & 6 & 6 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので $\widetilde{V}_0$ の基底は $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. これに Gram-Schmidt の直交化法を用いると, $\widetilde{V}_0$ の正規直交基底は $\boxed{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}}$.

	配点	採点（得点）

受験番号　　氏　名

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

[redacted]

区分	理工学 研究科 数理・物理サイエンス 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 （　　）
	博士前期／修士		数理サイエンス（解答用紙）	形式	全部で　　枚
	一般試験				

選択した問題に丸をつけてください (代数学・幾何学・解析学)

[幾何学] 略解：n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}$ の商空間なので，$\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}$ の自然な位相の商位相を与える．自然な写像 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}\to\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ を π と表す．$B=\{(z_0,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\mid |z_0|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$ とおくと，$B\subseteq\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}$ で，$\pi(B)=\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ である．B は有界閉集合であるので，コンパクトである．ゆえに，$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ もコンパクトなる．

受験番号　　氏　名

	配点	採点（得点）

2027 年度　中部大学大学院入学試験模擬問題

[redacted]

区分	理工学 数理・物理サイエンス　研究科 専攻	科目名	専門科目	参照物	持込　可・不可 (　　)
	博士前期／修士		数理サイエンス（解答用紙）	形式	全部で　　枚
	一般試験				

選択した問題に丸をつけてください (代数学・幾何学・解析学)

[解析学] 解答例

1. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ と $\forall \varepsilon > 0$ をとる. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束するので, $n_0 \in \mathbb{N}$ で, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し, $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ となるものがとれる. また, f_{n_0} は x_0 で連続なので, $\delta > 0$ を $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$ となるようにとることができる. すると, $|x - x_0| < \delta$ のとき,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

となり, f は x_0 で連続であることが示された. よって, f は $\mathbb{R}$ 上連続である.

2. (1) $0 < \alpha < \beta < 1$ となる α, β をとると, $b := \min\{f(x); x \in [\alpha, \beta]\}$ が存在し, $b > 0$ である. したがって,

$$a_n \ge \left(\int_\alpha^\beta \left(f(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(\int_\alpha^\beta b^n\, dx\right)^{\frac{1}{n}} = (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} b > 0.$$

また, $\forall x \in (0,1)$ に対し, $f(x) \le a$ なので,

$$a_n \le \left(\int_0^1 a^n\, dx\right)^{\frac{1}{n}} = a.$$

(2) $0 < \forall \eta < a$ をとる. すると, $\exists x_0 \in (0,1)$ s.t. $\eta < f(x_0)$. f は x_0 で連続なので, $0 < \exists\alpha < x_0 < \exists\beta < 1$ s.t. $\forall x \in (\alpha, \beta), \eta < f(x_0)$. したがって,

$$a_n \ge \left(\int_\alpha^\beta \left(f(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \ge \left(\int_\alpha^\beta \eta^n\, dx\right)^{\frac{1}{n}} = (\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \eta.$$

ここで, $n \to \infty$ とすれば, $\liminf_{n\to\infty} a_n \ge \eta$, i.e., $\liminf_{n\to\infty} a_n \ge a$. (1) と合わせれば, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. が得られる.

受験番号	氏　名		配点	採点（得点）

問 A

【出題の意図】

力学における基礎概念であるラグランジアン、正準運動量、ハミルトニアン、正準方程式、対称性と保存則に対する理解を問う。

【解答例】

(1) 質点 m の運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{3}$$

である。これを平面極座標 $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ で書き直すと

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{4}$$

である。したがって、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + G\frac{mM}{r} \tag{5}$$

である。

(2) 定義に従って計算すると

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\ ,\ p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \tag{6}$$

である。

(3) 定義に従って計算すると

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{mr^2}\right) - G\frac{mM}{r} \tag{7}$$

(4) p_ϕ についての正準方程式を書くと

$$\dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \tag{8}$$

となり、p_ϕ は保存する。

(5) 原点の周りの回転対称性

(6)

$$\dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2} \tag{9}$$

(7)

(6) の結果の右辺は

$$\frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2} = -\frac{d}{dr}\left\{-\frac{GmM}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right\} \tag{10}$$

と書き直すことができるので、

$$f(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} \tag{11}$$

とすればよい。

(8) $r \to 0$ で $U_{eff}(r) \to \infty$, $r \to \infty$ で $U_{eff}(r) \to 0$ である。

$$\frac{d}{dr}U_{eff}(r) = -G\frac{mM}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} \tag{12}$$

より、$\frac{d}{dr}U_{eff}(r) = 0$ となる r を求めると、

$$r_* = \frac{\ell^2}{Gm^2M} \tag{13}$$

である。

問 B

【出題の意図】

ベクトル解析の恒等式とベクトルポテンシャルの定義を用いて，真空中のマクスウェル方程式を導出する能力を問う。

【解答例】

(1) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

これは磁気単極子が存在しないこと，すなわち磁力線には始点や終点がなく，任意の閉曲面を貫く正味の磁束が 0 であることを表す。

(2) $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t$ より，

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

これは時間変化する磁場が渦状の電場をつくることを表す。

(3) $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t$ および $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ より，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0. \end{aligned}$$

これは考えている真空領域に電荷がなく，電場の湧き出しや吸い込みがないことを表す。

(4) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ および

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

より，

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{A}. \end{aligned}$$

ここで，

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

であり，また

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

であるから，

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

これは時間変化する電場，すなわち変位電流が磁場をつくることを表す。

問 C

【出題の意図】

統計力学における分配関数を出発点として，自由エネルギー，エントロピー，内部エネルギー，磁化などの熱力学量を導出する能力を問う。また，熱力学関係式の理解，低温極限における熱力学第 3 法則の理解，および高温極限におけるキュリー則の導出を通して，統計力学と熱力学との対応を総合的に理解しているかを評価する。

【解答例】

(1) 1 粒子のエネルギー準位は $\epsilon_1 = -\mu B$, $\epsilon_2 = \mu B$ であるから，1 粒子系の分配関数は $z = \sum_{i=1}^{2} e^{-\beta\epsilon_i} = e^{\beta\mu B} + e^{-\beta\mu B} = 2\cosh(\beta\mu B)$ である。したがって，1 粒子系のヘルムホルツの自由エネルギーは $f = -k_{\mathrm{B}}T\log\left[2\cosh(\beta\mu B)\right]$ となる。

各粒子は互いに独立で区別できるため，N 粒子系の分配関数は $Z = z^N$ である。よって，N 粒子系のヘルムホルツの自由エネルギーは $F = -k_{\mathrm{B}}T\log Z = -Nk_{\mathrm{B}}T\log z = -Nk_{\mathrm{B}}T\log\left[2\cosh(\beta\mu B)\right]$ である。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー $F = U - TS$ を全微分すると，$dF = dU - T\,dS - S\,dT$ となる。ここで，$dU = T\,dS - M\,dB$ を代入すると，$dF = T\,dS - M\,dB - T\,dS - S\,dT = -S\,dT - M\,dB$ を得る。

一方，F を T と B の関数と考えると，$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T dB$ である。これを $dF = -S\,dT - M\,dB$ と比較すると，$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_B$, $M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T$ を得る。

(3) (1) で求めた自由エネルギー $F = -Nk_{\mathrm{B}}T\log\left[2\cosh(\beta\mu B)\right]$ を $2\cosh(\beta\mu B) = e^{\beta\mu B}\left(1 + e^{-2\beta\mu B}\right)$ を用いて $F = -N\mu B - Nk_{\mathrm{B}}T\log\left(1 + e^{-2\beta\mu B}\right)$ と書き直す。これより，エントロピー $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_B = Nk_{\mathrm{B}}\log\left(1 + e^{-2\beta\mu B}\right) + Nk_{\mathrm{B}}\frac{2\beta\mu B}{e^{2\beta\mu B}+1}$ を得る。

さらに，$B > 0$ を一定に保って $T \to 0$（すなわち $\beta \to \infty$）とすると，$e^{-2\beta\mu B} \to 0$ であるから，$\lim_{T\to 0} S = 0$ となる。これは，基底状態が非縮退であるため，絶対零度ではすべての粒子が基底状態 $\epsilon_1 = -\mu B$ を占有し，エントロピーが 0 となることを意味している。この結果は熱力学第 3 法則と整合している。

(4) 内部エネルギーは $U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z$ で与えられる。$Z = \left[2\cosh(\beta\mu B)\right]^N$ より，$U = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left[2\cosh(\beta\mu B)\right] = -N\mu B\tanh(\beta\mu B)$ である。

(5) 磁化は $M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T = Nk_{\mathrm{B}}T\beta\mu\tanh(\beta\mu B) = N\mu\tanh(\beta\mu B)$ である。さらに，$\mu B \ll k_{\mathrm{B}}T$ では $\tanh(\beta\mu B) \simeq \beta\mu B$ であるから，$M \simeq \frac{N\mu^2}{k_{\mathrm{B}}T}B$ である。これを $M = \chi B$ と比較して，$\chi = \frac{N\mu^2}{k_{\mathrm{B}}T}$ を得る。

問 D

【出題の意図】

本問題は、量子力学における最も基本的な系である一次元無限深井戸型ポテンシャルを題材として、量子力学の基礎的な理解と計算能力を確認することを目的とする。

具体的には、Schrödinger 方程式と境界条件からエネルギー固有関数およびエネルギー固有値を導出できるかを確認する。また、波動関数の規格化、位置および運動量の期待値、運動エネルギーの期待値を計算させることにより、量子力学における状態、演算子、固有値、期待値の概念を正しく理解しているかを評価する。

計算自体は基本的な微分方程式および積分によって解ける内容とし、複雑な計算技術ではなく、大学学部レベルの量子力学の基本事項が確実に身についているかを確認することを主眼としている。

【解答例】

境界条件は

$$\boxed{\psi(0) = \psi(L) = 0}.$$

井戸内部では

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

であるから、

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

$\psi(0) = 0$ より $B = 0$、$\psi(L) = 0$ より

$$\sin kL = 0, \qquad kL = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

したがって、

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

および

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

を得る。

基底状態では

$$\boxed{\langle x\rangle = \frac{L}{2}}, \qquad \boxed{\langle p\rangle = 0}.$$

また、

$$\boxed{\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m}\right\rangle = E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}.$$