

# 内面研削スピンドル支持剛性のモデル化研究

安達 和彦

大久保 元博（大久保精工株式会社）

工作機械では主軸の剛性を含めた支持剛性の重要性が古くから指摘され、高剛性化が工作機械設計の基本要素となる。本報では、先ず初等材料力学の梁の撓み理論を用いた単一軸型と支持筒型の内面研削スピンドルの静剛性の定式化について報告する。続いて単一軸型と支持筒型のスピンドルの突き出し部に対する有限要素解析について報告する。そこでは静荷重下での砥石軸のたわみについて有限要素解析と理論式を比較し、理論式の適用範囲や限界、有限要素法でのモデル化の問題点について考察する。

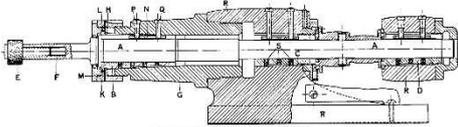
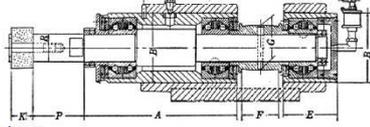
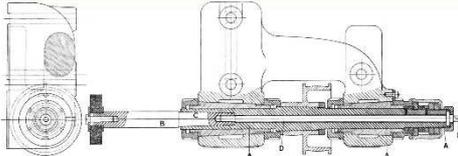
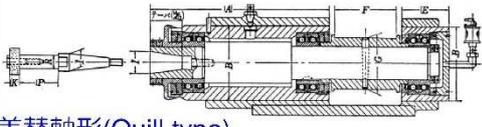
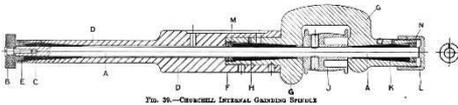
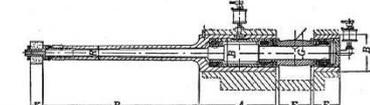
## 1. はじめに

工作機械では主軸の剛性を含めた支持剛性の重要性が古くから指摘され、高剛性化が工作機械設計の基本要素となる。工作機械の動剛性の重要性については、例えば株式会社ナガセインテグレックスでは架台共振周波数を従来比で2倍以上にする設計思想の下で曲線的外形状を有する独特の三点支持架台を実現し、複数機種の高精密研削盤の実機生産に適用している。研究代表者らは内面研削に焦点をあて、これまでに研削加工中の実機内面研削スピンドルの動剛性実測・評価を行い、2016年度および2017年度の砥粒加工学会学術講演会で実測・評価結果を発表した<sup>1,2)</sup>。一方、日本大学山田高三教授は「工作機械の支持剛性は古くて新しい問題。みな仕上がりが変わると知っているものの、理論化されていなかった」（日刊工業新聞2024年11月15日25面コラム欄「レーザー」より転記）と指摘する通り、古くから重要な設計上の問題であるが、剛性値の基準や剛性の設計式が整っていない現状にある。このような背景から本研究課題「内面研削スピンドル支持剛性のモデル化研究」は、支持剛性についての温故知新となる研究と位置付けられる。

機械部品の内面研削加工では、加工内径 $d$ に対する加工深さ $l$ の比 $ld$ に多様なバリエーションが存在し、加工ニーズに合わせて様々な $ld$ を有する内面研削スピンドルが開発されてきた。研究代表者らは長尺内面研削スピンドルの基本的な形態の違いによって、「単一軸型」、「支持筒型」および「アーバ型」の3つの形態に大別している<sup>3)</sup>。文献4では、「単一軸型」は「延し単一軸形」、「支持筒型」は「先端軸受形」、「アーバ型」は「差替軸形 (Quill type)」と分類している。1915年出版の文献5においても同じ3つの形態が代表的な内面研削スピンドルとして紹介され、技術史的な観点から研究代表者らの長尺内面研削スピンドルの形態分類は妥当と考えられる。表1に「単一軸型」、「支持筒型」および「アーバ型」の3つの形態の事例として文献4と5に掲載の図を転記して示す。

本報では、先ず初等材料力学の梁の撓み理論を用いた単一軸型と支持筒型の内面研削スピンドルの静剛性の定式化について報告する。そこでは静剛性の理論式に対する考察により単一軸型と支持筒型のスピンドルの静剛性の大小を比較し、単一軸型スピンドルの優位性を検証する。続いて単一軸型と支持筒型のスピンドルの突き出し部に対する有限要素解析について報告する。そこでは有限要素モデルを構築し、静荷重下での砥石軸のたわみ解析する。有限要素解析で得たたわみの値と理論式によるたわみの値と比較し、理論式の適用範囲や限界、有限要素法でのモデル化の問題点について考察する。

表1 内面研削スピンドル形態分類（図の出典：文献4，5）

形態分類	形態事例（教科書から転載）	
	1915年 J.J.Guest Grinding Machinery Edward Arnold、pp.136-137.	1982年 竹中規雄 切削加工法 機械工学全書 第21巻 コロナ社、pp.151-152.
単一軸型 Single-shaft type		
アーバ型 Adapter type		
支持筒型 Sleeve type		

## 2. スピンドル静剛性の定式化

### 2.1 定式化における仮定

本報では、単一軸型と支持筒型の内面研削スピンドルの静剛性を初等材料力学の梁の撓み理論の適用で定式化するため、以下を仮定する。

**仮定1：**単一軸型スピンドルの「と石軸」は突き出し部（overhang）を有し、先端の「と石」が工作物に切込む際に反力を受けて突き出し部はたわむ。切込み時の反力を集中荷重とみなし、「と石軸」の突き出し部の曲げ変形が自由端に集中荷重を受ける片持ちはりの曲げ変形で近似できるものと仮定する。

**仮定2：**支持筒型スピンドルの「と石軸」は支持筒の部分を含めて突き出し部と考え、単一軸型スピンドルと同様に「と石軸」と支持筒の曲げ変形が片持ちはりの曲げ変形で近似できるものと仮定する。

**仮定3：**仮定2の下で、支持筒型スピンドルでは、先端部の軸受の位置で「と石軸」と支持筒のたわみとたわみ角が等しいと仮定する。軸受の変形は無視する。

仮定1の下で単一軸型スピンドルは図1に示すようにモデル化する。図1の写真は単一軸型内面研削スピンドル<sup>3)</sup>の開発事例で、突き出し部元径  $d$  に対する突き出し長さ  $l$  の比 ( $l/d$ ) が 15 となる。

仮定2の下で支持筒型スピンドルは図2に示すようにモデル化する。

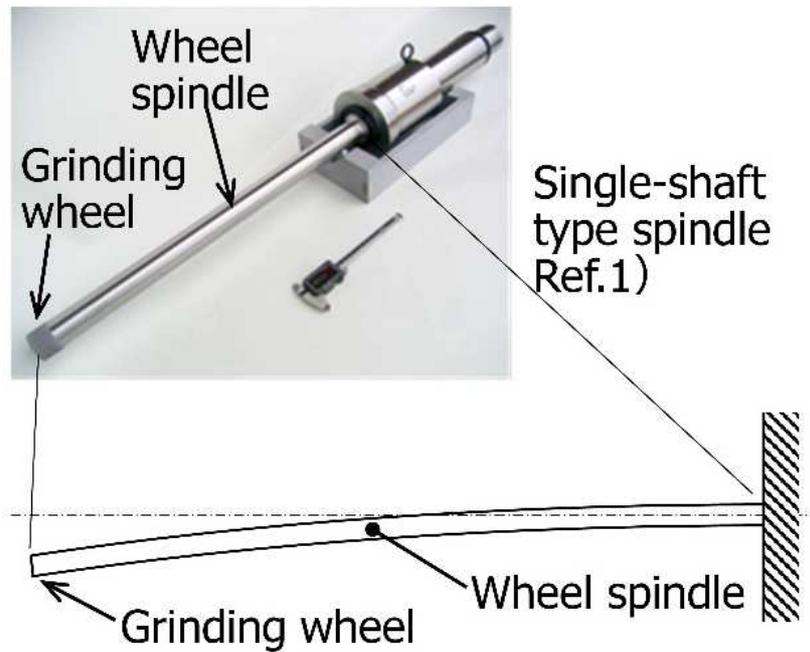


図1 単一軸型スピンドルのモデル化

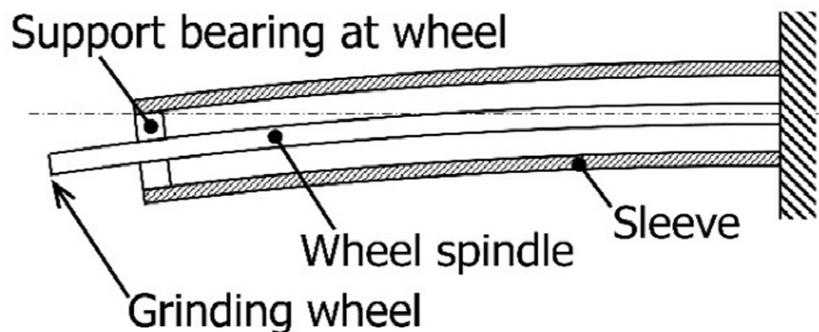


図2 支持筒型スピンドルのモデル化

## 2.2 単一軸型スピンドル

本節および次節での静剛性の定式化において量記号に付す添え字を説明する．単一軸型 (Single-shaft type) に関する物理量には添え字  $SST$  を，支持筒型 (Sleeve type) に関する物理量には添え字  $ST$  を付ける．と石軸 (Wheel spindle) に関する物理量には添え字  $ws$  を，支持筒 (sleeve) に関する物理量には添え字  $sl$  を付ける．単一軸型スピンドルは図1でモデル化するが，自由端の集中荷重  $F$  とたわみ  $y_{SST}$  および定式化で用いる量記号を改めて図3に示す．図3では，自由端  $A$  および固定端  $B$  とし，突き出し部の長さを  $l_{SSTws}$ ，ヤング率を  $E$ ，断面二次モーメントを  $I_{SSTws}$  とする．自由端の集中荷重  $F$  とたわみ  $y_{SST}$  は，材料力学の教科書に示されている片持ちはりに対する関係式 (例えば文献6の式(6.6)) を参照して次式で与えられる．

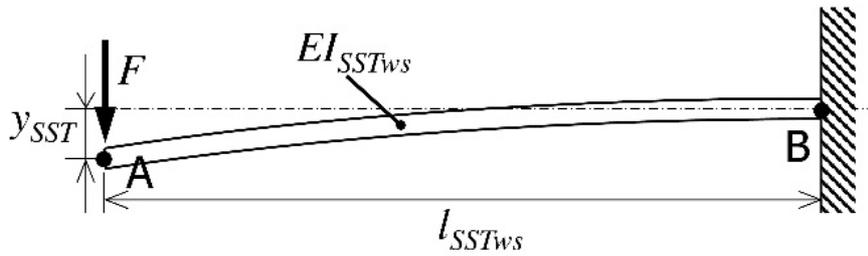


図3 単一軸型スピンドルのはりモデル

$$y_{SST} = \frac{l_{SSTws}^3}{3EI_{SSTws}} F \quad (1)$$

式(1)を変形することで、先端に単位静的変位を生じさせるために必要な先端の集中荷重として単一軸型スピンドルの静剛性が次式で定式化できる。

$$\frac{F}{y_{SST}} = \frac{3EI_{SSTws}}{l_{SSTws}^3} \quad (2)$$

### 2.3 支持筒型スピンドル

支持筒型スピンドルについても同様に自由端の集中荷重  $F$  とたわみ  $y_{ST}$  および定式化で用いる量記号を図4に示す。図4では、「と石軸」の自由端Aおよび固定端B、支持筒の自由端Cおよび固定端D、「と石軸」上で支持筒との間に配する軸受の位置をEとする。「と石軸」の長さ(AB間の長さ)を  $l_{STws}$  とする。「と石軸」のEB間の長さ(と石軸の長さ)と支持筒の長さ(CD間の長さ)  $l_{STsl}$  は実際には異なるが、本報では定式化を簡略化するため両者を等しいとみなす。「と石軸」と支持筒のヤング率は共に  $E$ 、断面二次モーメントはそれぞれ  $I_{STws}$  と  $I_{STsl}$  とする。はりAB(と石軸)のE点(軸受位置)のたわみとたわみ角が、はりCD(支持筒)のC点(支持筒先端の軸受位置)のたわみとたわみ角にそれぞれ等しいという条件からE点(すなわちC点)の反力  $R$  と曲げモーメント  $M$  が以下のように導出できる<sup>6)</sup>。

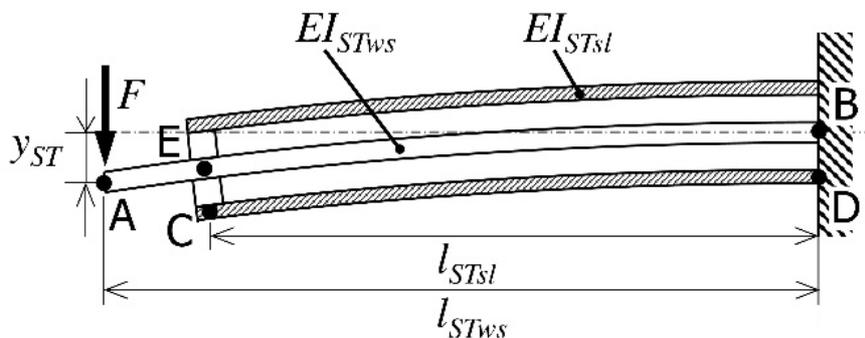


図4 支持筒型スピンドルのはりモデル

$$R = \frac{I_{STsl}}{I_{STws} + I_{STsl}} F \quad (3)$$

$$M = \frac{I_{STsl}}{I_{STws} + I_{STsl}} (l_{STws} - l_{STsl}) F \quad (4)$$

自由端 **A** のたわみ  $y_{ST}$  は、自由端に作用する集中荷重  $F$  によるたわみと **E** 点に作用する反力  $R$  と曲げモーメント  $M$  によるたわみの和として次式で与えられる。

$$y_{ST} = \frac{l_{STws}^3}{3EI_{STws}} F - \frac{l_{STsl}^2 (3l_{STws} - l_{STsl})}{6EI_{STws}} R - \frac{l_{STsl} (2l_{STws} - l_{STsl})}{2EI_{STws}} M \quad (5)$$

式(5)に式(3)と式(4)を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} y_{ST} &= \frac{1}{3EI_{STws}} \left\{ \frac{I_{STws} l_{STws}^3 + I_{STsl} (l_{STws} - l_{STsl})^3}{I_{STws} + I_{STsl}} \right\} F \\ &= \frac{l_{STws}^3}{3EI_{STws}} \left\{ \frac{I_{STws} + I_{STsl} \left( \frac{l_{STws} - l_{STsl}}{l_{STws}} \right)^3}{I_{STws} + I_{STsl}} \right\} F \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)を変形することで、先端に単位静的変位を生じさせるために必要な先端の集中荷重として支持筒型スピンドルの静剛性が次式で定式化できる。

$$\frac{F}{y_{ST}} = \frac{3EI_{STws}}{l_{STws}^3} \left\{ \frac{I_{STws} + I_{STsl}}{I_{STws} + I_{STsl} \left( \frac{l_{STws} - l_{STsl}}{l_{STws}} \right)^3} \right\} \quad (7)$$

## 2.4 スピンドル静剛性の比較

本節では、同一の加工内径および加工深さの内面研削加工を単一軸型と支持筒型の内面研削スピンドルで行うことを想定し、2.2節と2.3節で導出した単一軸型スピンドルと支持筒型スピンドルの静剛性の理論式を比較する。加工対象が同じであることから、以下の条件を設定する。

$$l_{SSTws} = l_{STws} = l_{ws} \quad (8)$$

$$d_{SSTws} = d_{STsl-out} \quad (9)$$

式(8)は単一軸型スピンドルの「と石軸」の長さ和支持筒型スピンドルの「と石軸」の長さが等しい条件を示す。ただし、「と石軸」の長さは、図3と図4で示すように単一軸型と支持筒型のスピンドルを片持ちはりでモデル化した場合の片持ちはりの長さとする。式(9)は単一軸型スピンドルの「と石軸」の外径と支持筒型スピンドルの支持筒の外径が等しい条件を示す。式(9)の条件の下で、図5に示す単一軸型スピンドルの「と石軸」の断面と支持筒型スピンドルの断面の模式図から、以下の

条件が成立する.

$$I_{SSTws} > I_{STws} + I_{STsl} \quad (10)$$

支持筒型スピンドルの静剛性の理論式(7)の「と石軸」の長さとして支持筒の長さに関する比を $\alpha$ とする. 支持筒型スピンドルの構造上, 常に次式が成立する.

$$\alpha = \frac{l_{STws} - l_{STsl}}{l_{STws}} < 1 \quad (11)$$

従って,

$$\alpha^3 = \left( \frac{l_{STws} - l_{STsl}}{l_{STws}} \right)^3 < 1 \quad (12)$$

となる. 式(8)と式(12)から式(7)について次の関係が導き出せる.

$$\frac{F}{y_{ST}} = \frac{3EI_{STws}}{l_{ws}^3} \left( \frac{I_{STws} + I_{STsl}}{I_{STws} + I_{STsl}\alpha^3} \right) < \frac{3EI_{STws}}{l_{ws}^3} \left( \frac{I_{STws} + I_{STsl}}{I_{STws}} \right) < \frac{3E(I_{STws} + I_{STsl})}{l_{ws}^3} \quad (13)$$

式(13)に式(10)を適用することで, 支持筒型スピンドルの静剛性の理論式(7) と単一軸型スピンドルの静剛性の理論式(2) の間の大小関係が以下のように導出できる.

$$\frac{F}{y_{ST}} < \frac{3E(I_{STws} + I_{STsl})}{l_{ws}^3} < \frac{3EI_{SSTws}}{l_{ws}^3} = \frac{F}{y_{SST}} \quad (14)$$

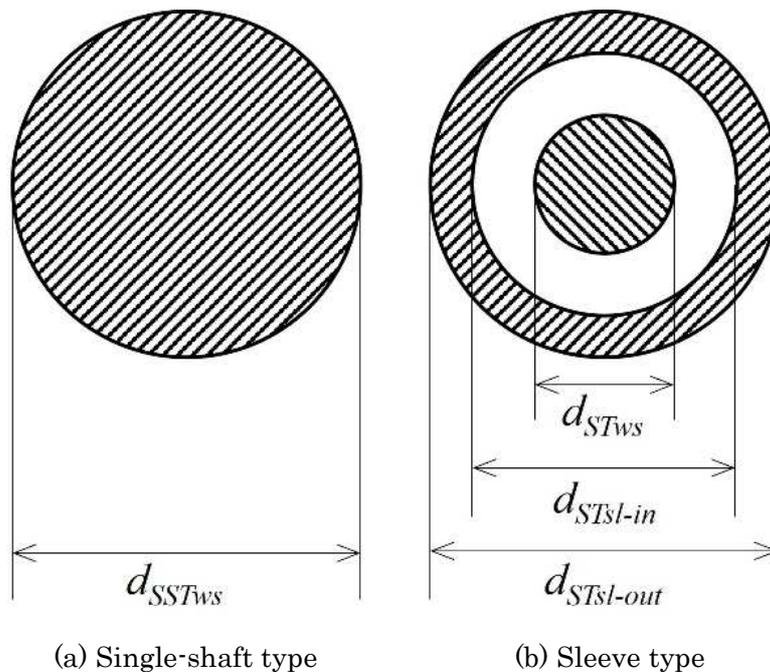


図5 単一軸型および支持筒型スピンドルの断面模式図

### 3. 内面研削スピンドルの有限要素解析

#### 3.1 スピンドル諸元

同一の加工内径および加工深さの内面研削加工を単一軸型と支持筒型の内面研削スピンドルで行うことを想定し、加工内径 150mm 前後で加工深さ 250mm 程度とする。このとき単一軸型と支持筒型のスピンドルの諸元を表 2 に示す。表 2 で  $l$  と  $d$  は軸長と軸径を示す。単一軸型スピンドルの砥石軸の長さ  $l_{SSTws}$  と支持筒型スピンドルの砥石軸の長さ  $l_{STws}$  が等しい条件とした。また、単一軸型スピンドルの砥石軸の直径  $d_{SSTws}$  と支持筒型スピンドルの支持筒の外径  $d_{STsl-out}$  が等しい条件とした。砥石の直径は 100mm を想定する。なお、本報の解析では砥石軸の回転は考慮しないが、砥石軸の回転速度を  $7,000 \text{ min}^{-1}$  と想定すると砥石周速度は  $36.6 \text{ m/s}$  となる。

表 2 単一軸型と支持筒型のスピンドルの諸元

	Single-shaft type (Unit: mm)	Sleeve type (Unit: mm)
Wheel spindle	$l_{SSTws} = 300$ $d_{SSTws} = 70$	$l_{STws} = 300$ $d_{STws} = 15$
Sleeve		$l_{STsl} = 239$ $d_{STsl-out} = 70$ $d_{STsl-in} = 35$

#### 3.2 軸受のモデル化

支持筒型スピンドルは支持筒先端の軸受で砥石軸を支持する構造となり、本報のモデルでは並列配置した 2 個のアンギュラ玉軸受でモーメント荷重を支持できるようにした。表 1 に示した支持筒型スピンドルの支持筒内径  $d_{STsl-in}$  および砥石軸直径  $d_{STws}$  から軸受は 7202C を選定した。支持筒型スピンドルの有限要素モデルでは国内軸受メーカーの WEB ページ<sup>4)</sup>で提供される CAD データを用いて軸受の内輪と外輪の形状をモデル化した。軸受の支持剛性は線形ばねでモデル化し、文献<sup>5)</sup>の玉軸受のラジアル剛性の計算式：

$$k_r = C_r \times 10^6 \times Fr^{1/3} \times B^{1/3} \times N^{2/3} \times \cos^{5/3} \alpha \quad (15)$$

で算出したばね定数を有する線形ばねを有限要素モデルに組み込んだ。式(15)で、 $C_r$  は軸受の種類で定まる定数で深溝・アンギュラ玉軸受では 11.76 となる。他の変数は、 $Fr$  がラジアル荷重で 500 N を仮定し、 $B$  が転動体の直径で  $N$  が転動体の数で、CAD データより  $B = 6 \text{ mm}$ 、 $N = 8$  個とした。 $\alpha$  は接触角で  $15^\circ$  とした。以上から  $kr = 6.40 \times 10^4 \text{ N/mm}$  となった。

#### 3.3 スピンドルの有限要素モデル

単一軸型と支持筒型のスピンドルの突き出し部に対する有限要素モデルは汎用有限要素解析ソフト Abaqus 上で作成した。砥石部分は剛体とし、砥石軸、支持筒、軸受内輪・外輪のソリッドモデルを作成し、六面体要素 C3D8R でメッシュ生成した。図 6 にスピンドルの突き出し部のアセンブリモ

デルを示す。

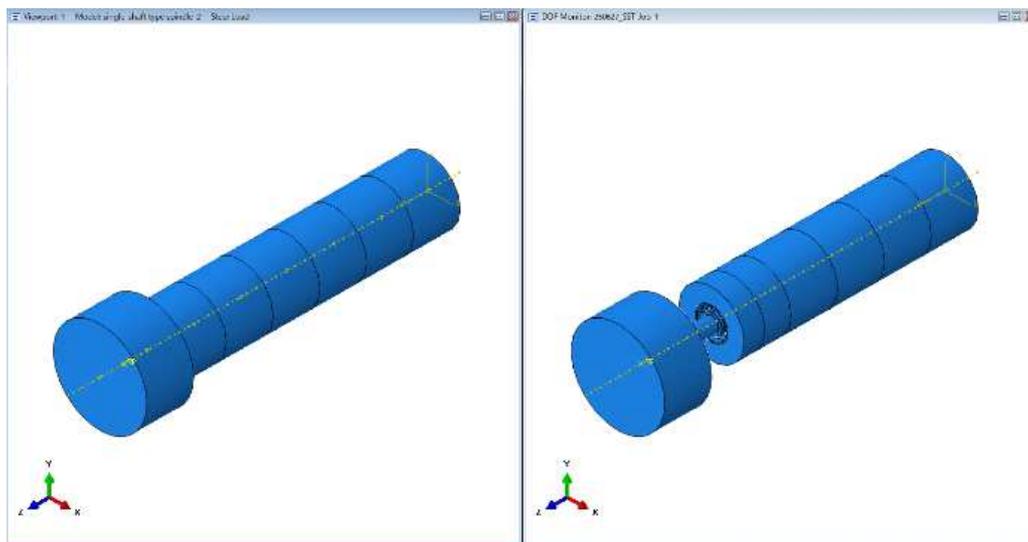


図 6 スピンドルの突き出し部のアセンブリモデル（左：単一軸型，右：支持筒型）

### 3.4 有限要素解析結果

単一軸型と支持筒型のスピンドルの有限要素モデルで砥石の重心に静荷重を付加したときのたわみを解析した。砥石に負荷する静荷重は、100 N、200 N、300 N とし、解析結果の例として図 7 に静荷重 100 N 負荷時の単一軸型と支持筒型の荷重方向の変形図を示す。図 6 では 100 倍の倍率で変形形状を示し、変形量のカラーコンターを重ねて表示した。図 8 に 2.2 節と 2.3 節で導出した理論式から求めたたわみ（実線と点線）と有限要素解析で求めたたわみを示す。

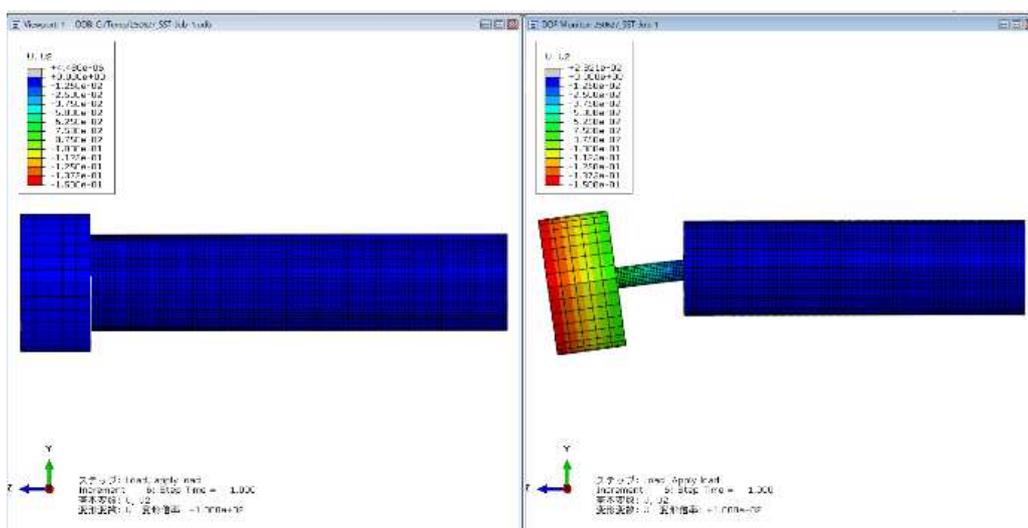


図 7 有限要素解析結果（左：単一軸型，右：支持筒型）

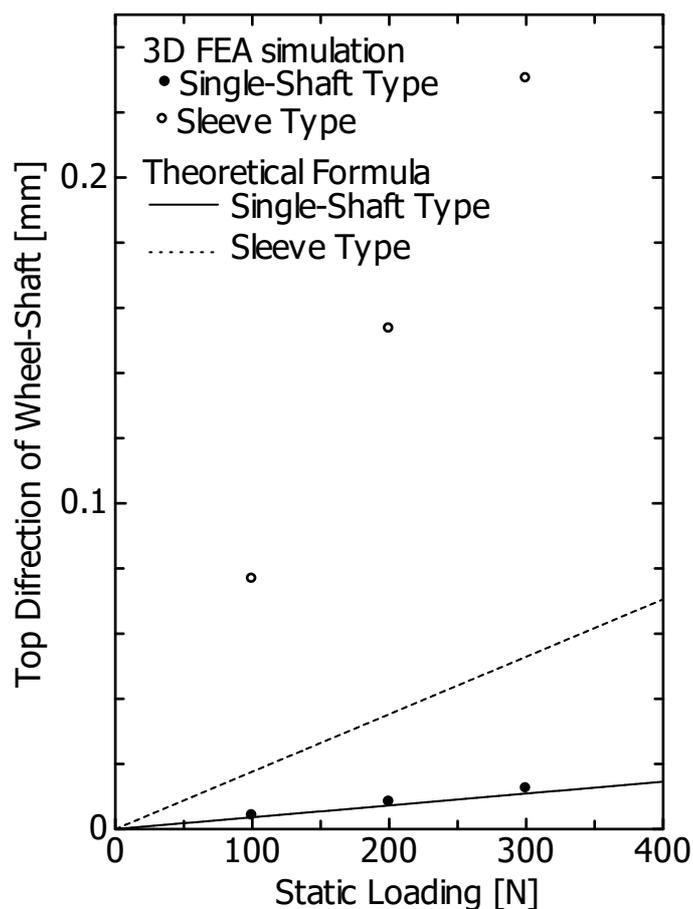


図 8 単一軸型と支持筒型のスピンドルの静荷重に対するたわみ：理論式と有限要素解析の比較

### 3.5 考察

図 8 から支持筒型スピンドルでの静荷重に対するたわみの値が 2.2 節と 2.3 節で導出した理論式と有限要素解析とで大きく異なる結果となった。支持筒型スピンドルの有限要素モデルでは支持筒先端に 2 個の軸受を配置したが、解析結果では軸受部で砥石軸が傾き、モーメント荷重に対する剛性が不足すると考えられる。2.2 節と 2.3 節で導出した理論式は、支持筒先端の軸受部で支持筒と砥石軸のたわみとたわみ角が等しい条件の下で定式化した。実機の軸受部は、軸受のモーメント剛性に応じた変形が生じると考えられる。

## 4. おわりに

本研究では内面研削スピンドル支持剛性のモデル化に取り組んだ。先ず初等材料力学の梁の撓み理論を適用して単一軸型と支持筒型の内面研削スピンドルの静剛性を定式化した。定式化にあたり、単一軸型スピンドルの「と石軸」および支持筒型スピンドルの「と石軸」と支持筒の曲げ変形が片持ちりの曲げ変形で近似できるものと仮定した。定式化した静剛性の理論式について考察を行った。同一の加工内径および加工深さの内面研削加工を想定し、単一軸型スピンドルの「と石軸」の長さ と支持筒型スピンドルの「と石軸」の長さが等しく、単一軸型スピンドルの「と石軸」の径と支持筒の径が等しい条件の下で、支持筒型スピンドルの静剛性の値が単一軸型スピンドルの静剛性の値に

比べて小さくなることを導出した。静剛性の観点から単一軸型スピンドルの優位性が示された。続いて単一軸型と支持筒型のスピンドルの突き出し部に対する有限要素モデルを構築し、静荷重下での砥石軸のたわみの値を求めた。有限要素モデルから求めたたわみの値と理論式を用いて求めたたわみの値と比較した。支持筒型スピンドルでの静荷重に対するたわみの値が理論式と有限要素解析とで大きく異なる結果となり、支持筒型スピンドルに対する理論式と有限要素モデルの改良が今後の課題となる。

## 参考文献

- 1) 安達和彦・大久保信雄・大久保元博・向井良平・高橋宏美,“長尺内面研削スピンドルの開発に関する研究(第 6 報: 小径深穴加工物の試研削時の振動解析),” 2016 年度砥粒加工学会学術講演会 (ABTEC2016)講演論文集, A05, (2016), pp.13-16.
- 2) 安達和彦・大久保信雄・大久保元博・向井良平・高橋宏美,“長尺内面研削スピンドルの開発に関する研究(第 7 報: 加工時の振動挙動と加工内面の幾何特性の評価),” 2017 年度砥粒加工学会学術講演会(ABTEC2017)講演論文集, D34, (2017), pp.313-317.
- 3) 大久保元博・大久保信雄・安達和彦・高橋宏美,“「単一軸型」長尺内面研削用スピンドルユニット～技術賞とその後,” 砥粒加工学会誌, Vol.68, No.1 (2024), p.12.
- 4) 竹中規雄,“切削加工法,” 機械工学全書 第 21 巻, コロナ社, (1982), pp.151-152.
- 5) J.J.Guest, “Grinding Machinery,” Edward Arnold, (1915), pp.136-137.
- 6) 清家政一郎,“工学基礎 材料力学 (新訂版),” 共立出版 (1997), p.70.